Matemáticas II- 2º Bachillerato **BASE Y PRODUCTO ESCALAR** **VECTORES 2**

1. Dados los vectores $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(1,2,1)$
   - ¿Son independientes?
   - Halla la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$, así como el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

2. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores independientes y de igual módulo, demuestra que $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ son perpendiculares.

3. Sean los vectores $\vec{u}(1,1,3)$, $\vec{v}(2,2,-1)$ y $\vec{w}(0,1,0)$

- Demostrar que forman una base en $\Re^3$
- Halla las coordenadas de (4,-7, 2) en esta base.

4. Sean los vectores $\vec{u}(1,0,0)$ y $\vec{v}(1,1,0)$ linealmente independientes, encuentra una combinación lineal de los dos y que sea perpendicular a $\vec{v}$.

5. Dados los vectores $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(1,2,1)$ y $\vec{c}(1,0,3)$.
   - Halla los valores α, β, γ tales que $\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}+\gamma\cdot\vec{c}=(0,0,0)$
   - ¿Son linealmente independientes los tres vectores anteriores?

SOLUCIONES A LA FICHA **VECTORES 2**

1.

- Para comprobar que son independientes utilizamos la definición: $¿\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow\alpha=\beta=0??$, $\alpha\cdot(1,2,3)+\beta(1,2,1)=(0,0,0)\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=0\\2\alpha+2\beta=0\\3\alpha+\beta=0\end{cases}$, que como podemos observar las dos primeras ecuaciones son equivalentes, por lo tanto tachamos la segunda $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\3\alpha+\beta=0\end{cases}$, que tiene como solución única $\alpha=0 \quad y \quad \beta=0$, por tanto independientes

- la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$, se calcula teniendo en cuenta la definición del producto escalar,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Rightarrow|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{b}|\cdot proy(\vec{a}\ sobre\ \vec{b})\Rightarrow proy(\vec{a}\ sobre\ \vec{b})=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\frac{|1+4+3|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{8}{\sqrt{6}}\text{ u}$$

2- Si son vectores independientes y de igual módulo, vamos a hallar el producto escalar de $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ para ver si nos da 0 y por tanto $\vec{a}$ y $\vec{b}$ serán perpendiculares.

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+\vec{a}\,\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=0$ ya que $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ y nos han dicho que los módulos son iguales

3- Sean los vectores $\vec{u}(1,1,3)$, $\vec{v}(2,2,-1)$ y $\vec{w}(0,1,0)$

Para demostrar que forman una base en $\Re^3$, veamos primero si son independientes, hallamos su determinante: $\begin{vmatrix}1&2&0\\1&2&1\\3&-1&0\end{vmatrix}=7\neq 0$, por tanto son independientes y como son tres en $\Re^3$ forman una base.

Para hallar las coordenadas de (4,-7, 2) en esta base , formemos el sistema:

$$(4,-7,2)=\alpha(1,1,3)+\beta(2,2,-1)+\gamma(0,1,0)\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta=4\\\alpha+2\beta+\gamma=-7\\3\alpha-\beta=2\end{cases}\Rightarrow\alpha=\frac{\begin{vmatrix}4&2&0\\-7&2&1\\2&-1&0\end{vmatrix}}{7}=\frac{8}{7}$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -7 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{7} = \frac{10}{7} \text{ y } \gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-77}{7} = -11 \Rightarrow \text{las coordenadas son: } \left(\frac{8}{7}, \frac{10}{7}, -11\right)$$

4- Una combinación lineal de los vectores $\vec{u}(1,0,0)$ y $\vec{v}(1,1,0)$ es de la forma:

$\alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) = (\alpha + \beta, \beta, 0)$ que si tiene que ser perpendicular a $\vec{v}$ $\Rightarrow$ $(\alpha + \beta, \beta, 0)\cdot(1,1,0) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \beta = 0 \Rightarrow \alpha + 2\beta = 0$, por lo tanto una combinación lineal será para $\alpha = 2, \beta = -1$, es decir, $2\vec{u} - \vec{v}$.

5- Si $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(1,2,1)$ y $\vec{c}(1,0,3)$ y $\alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{b} + \gamma\cdot\vec{c} = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \\ 3\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$

para ello hallamos el determinante de los tres vectores: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow$

$\alpha = 0, \beta = 0$ y $\gamma = 0$ por ser única la solución del sistema.

A la pregunta de si son linealmente independientes los tres vectores, hay que decir que si por ser la solución, la dada anteriormente.